

基于 Novikov 求逆变换公式的 4 维扇形 SPECT 图像快速定量重建

范毅^{1),2)} 卢虹冰¹⁾ 刘欣¹⁾ 郝重阳²⁾ Liang Jerome³⁾

¹⁾(第四军医大学计算机应用教研室,西安 710032) ²⁾(西北工业大学电子信息学院,西安 710072)

³⁾(纽约州立大学石溪分校放射系,纽约 11794)

摘要 为实现 4 维动态 SPECT 图像的快速定量重建,提出了一种用于扇形投影方式下的解析重建算法。该方法首先利用 Karhune-Loève (KL) 变换提取出投影时间序列的相关信息;然后再利用推导至扇形投影方式下的 Novikov 求逆变换公式,在 KL 域中对投影分量进行有选择的部分或全部重建;最后通过逆 KL 变换获得重建图像。实验结果表明,该算法能有效补偿非均匀衰减的影响,其重建图像虽与迭代算法的结果接近,但重建时间则由迭代算法的 77 s 缩短为本文算法的 14 s,从而使快速 4 维 SPECT 定量重建成为可能,可望具有广泛的临床应用前景。

关键词 非均匀衰减 扇形投影 KL 变换 Novikov 逆变换公式

中图法分类号:TP391.41 文献标识码:A 文章编号:1006-8961(2008)12-2270-05

Fast and Quantitative Reconstruction of 4D SPECT for Fan-beam Geometry Based on Novikov's Inverse Formula

FAN Yi^{1),2)}, LU Hong-bing¹⁾, LIU Xin¹⁾, HAO Chong-yang²⁾, Liang Jerome³⁾

¹⁾(Department of Computer Application/BME, Fourth Military Medical University, Xi'an 710032)

²⁾(School of Electronic Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

³⁾(Department of Radiology, State University of New York, New York 11794)

Abstract Study on fast and quantitative reconstruction algorithms for dynamic SPECT (4 dimension) under fan-beam geometry is conducted. The correlated information along time axis of projection sequences is de-correlated using Karhune-Loève (KL) transformation. Then we reconstruct all or part of the components in KL domain with Novikov's inverse formula, which is deduced for fan-beam geometry. The results can be obtained by inverse KL transform. The reconstruction can compensate for the non-uniform attenuation effectively. The results are similar to those from iterative approaches while there construction time is greatly abbreviated. The proposed method can reconstruct 4D SPECT fast and quantitatively and thus has a good future in clinical applications.

Keywords non-uniform attenuation, fan-beam geometry, Karhune-Loève transform, Novikov's inverse formula

1 引言

单光子发射断层成像 (single photon emission computer tomography, SPECT) 技术因其具有设备简单及临床上成像费用较低等优点,现已广泛应用在

核医学临床诊断中。其中,动态(4 维)SPECT 能够反映一段时间内放射性示踪剂在人体内(心脏、大脑)的分布及运动情况,因此提供了比静止状态下更多的有用信息。目前对 4 维 SPECT 图像重建主要是通过将该问题简化到 3 维加以解决,即对所有的时间序列投影图像进行逐幅重建。其优点是可直

接利用已有的各种重建算法,而缺点则是忽略了时间序列投影图像中存在的相关信息,且计算耗时。

近年来已有一些学者将该问题的解决放到 Karhune-Loève (KL)域中来进行研究^[1,2]。该类算法是将 4 维 SPECT 数据作为一个整体考虑,由于充分利用了时间序列图像中存在的相关信息,因此弥补了以往算法的不足。但受迭代算法的限制,对于 4 维 SPECT 图像,计算量巨大。

目前临床广泛采用的 SPECT 重建算法是以滤波反投影(filtered back-projection, FBP)算法为代表的解析类算法。与迭代算法相比,该类算法虽易于实现,且重建图像速度快,但不能对非均匀衰减进行有效补偿,其重建图像只能用于定性分析。通过解析途径对非均匀衰减进行补偿,这一问题直至近年来随着 Novikov 求逆变换公式^[3]的推出才得以解决。Kunyansky 首先利用该公式重建了平行投影模式下具有人体胸腔复杂结构的 SPECT 图像^[4],取得了很好的效果。本课题组之前的研究则进一步将该算法推至扇形投影模式下^[5]。实验表明,通过该算法不仅能够实现对非均匀衰减进行定量补偿,并可取得与迭代算法近似的重建结果,而重建时间则与传统的 FBP 算法耗时接近。

基于以上研究工作,本文提出了一种针对扇形投影方式的 4 维 SPECT 图像解析定量重建算法(KL-Novikov),该算法首先沿时间轴对投影图像进行 KL 变换,即将投影图像转换到 KL 空间,并按特征值大小对所有投影分量进行排序;然后再利用推广至扇形投影方式下的 Novikov 求逆变换公式对这些分量进行重建;最后,通过逆 KL 变换来获得定量的重建结果。下面,本文对该算法的关键步骤进行描述。

2 时间序列图像的 KL 变换

KL 变换,又称主分量分析,如今已被广泛应用于多频带、多光谱图像的去相关性问题的研究上。对于动态 SPECT 图像,由于在一个生理周期(如心脏收缩及扩张)内,放射性示踪剂在人体器官内的分布情况及辐射程度相对稳定,因此连续采样产生的 SPECT 图像具有极大的相关性。根据这一特点,可利用 KL 变换的性质对时间序列图像中的相关信息进行提取。

时域内扇形投影图像中的任意一点 (i, j) , 其灰度值随时间的变化曲线(time activity curve, TAC)可表示为

$$\mathbf{x}_{\text{time}}(i, j) = [x_1(i, j), x_2(i, j), \dots, x_k(i, j)]^T \quad (1)$$

式中, K 为采样次数, T 表示转置操作。时间序列协方差矩阵 \mathbf{C}_{time} 的第 k 行第 l 列元素为

$$[\mathbf{C}_{\text{time}}]_{k,l} = \frac{1}{I \times J - 1} \sum_{i,j} (x_k(i, j) - \bar{x}_k) \times (x_l(i, j) - \bar{x}_l) \quad (2)$$

$I \times J$ 为单幅图像中像素的数目, \bar{x}_k 为第 k 幅采样图像像素的均值, 即

$$\bar{x}_k = \frac{1}{I \times J} \sum_{i,j} x_k(i, j) \quad (3)$$

\mathbf{C}_{time} 的特征向量 \mathbf{M} 可通过下式计算得到:

$$\mathbf{C}_{\text{time}} \mathbf{M}^T = \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{V} \quad (4)$$

其中, $\mathbf{V} = \text{diag}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, v_k 为 \mathbf{C}_{time} 的第 k 个特征值。

通过以上处理,就可得到时间序列图像在 KL 域内的映射。由 KL 变换的性质可知,由于对应特征值大的分量代表了更多的相关信息,因此,在这里将 v_k 按由大到小的顺序排序,则点 (i, j) 的 KL 变换可表示为

$$\mathbf{A}(i, j) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}_{\text{time}}(i, j) \quad (5)$$

其中, $\mathbf{A}(i, j) = [a_1(i, j), a_2(i, j), \dots, a_k(i, j)]^T$, $a_k(i, j)$ 为与像素 (i, j) 对应的第 k 个 KL 域分量的值。

最后对所有像素进行处理后的结果,按照空间顺序重新排列,就得到了 KL 域中的扇形投影分量。

3 KL 域中扇形投影定量重建

时域内 4 维 SPECT 投影模型可表示为^[1]

$$E[\mathbf{Y}] = \mathbf{H}\mathbf{X} \quad (6)$$

式中, $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_k^T]^T$ 为原始图像数据,而 \mathbf{x}_k 为 $N \times 1$ 维的向量 (N 为每幅图像中的像素数量)。 $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_k^T]^T$, $k = 1, 2, \dots, K$ (K 为一个生理周期内的采样次数)。 \mathbf{y}_k 为 $L \times 1$ 维向量 (L 表示每幅投影图像中的像素点数), \mathbf{Y} 代表 4 维投影数据。 $\mathbf{H} = \text{diag}[\mathbf{h}_s, \mathbf{h}_s, \dots, \mathbf{h}_s]$, \mathbf{h}_s 是大小为 $LK \times NK$ 的系统响应矩阵(这里假设该生理周期内,系统响应矩阵保持不变,即所有时间序列图像都受到相同的系统响应矩阵 \mathbf{h}_s 的作用)。

对于上述模型,式(4)中的矩阵 \mathbf{M} 可扩展为

$$\mathbf{M}_L = \mathbf{M} \otimes \mathbf{I}_L \quad (7)$$

式中, \mathbf{I}_L 为 $L \times L$ 大小的单位矩阵, \mathbf{M}_L 表示矩阵 \mathbf{M} 与单位阵 \mathbf{I}_L 进行 Kronecker 积的结果。将式(7)代入式(6),可得

$$\begin{aligned} M_L E[Y] &= M_L H X = (M \otimes I_L)(I_K \otimes h_s) X \\ &= (M I_K) \otimes (I_L h_s) X = (I_K M) \otimes (h_s I_N) X \\ &= (I_K \otimes h_s)(M \otimes I_N) X = H M_N X \end{aligned} \quad (8)$$

式中,下标 K, N 的意义与式(7)中的 L 相同,分别表示不同大小的单位阵及扩展的矩阵 M 。如果将 KL 变换表示为

$$\tilde{X} = M_N X, \quad \tilde{Y} = M_L Y \quad (9)$$

则经过变换后的投影数据和原始图像数据之间的关系可表示为

$$E[\tilde{Y}] = H \tilde{X} \quad (10)$$

请注意式(6)与式(10)有相同的表达形式,这表示 KL 域内的系统响应与时域内完全一致,因此,在时域内推导出来的各种重建算法,对于经过 KL 变换后的投影数据,依然可以直接应用。

相对于平行投影方式而言,扇形投影方式不仅能够获取精度更高的感兴趣区域的投影图像,而且可降低射线扫描强度和缩短扫描时间。这些优点都在临床上有着重要的实用价值。因此,本文也针对这一投影方式下的重建算法展开研究。

扇形投影方式下,投影线、探测器及重建图像的对应几何关系如图 1 所示:

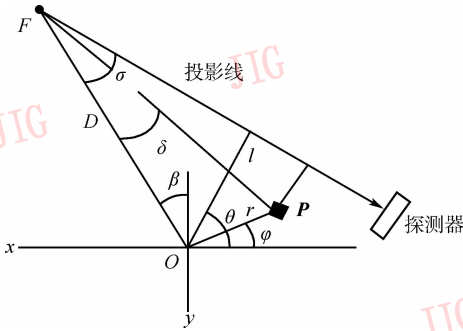


图 1 扇形束投影示意图

Fig. 1 Projection acquisition for fan-beam geometry

图中 O, F 分别为坐标原点与扇形焦点。 P 为重建图像中任意点,坐标为 (x, y) , σ 为 OF 与投影线夹角, δ 为 OF 与 PF 夹角, β 为 OF 与 y 轴夹角, D 为 OF 间距离。

当坐标沿逆时针方向旋转角度 θ 时,点 (x, y) 与其旋转坐标 (s, t) 间的关系可表示为

$$\begin{aligned} s &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ t &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \quad (11)$$

经衰减 Radon 变换,在投影角度为 θ 、探测器位置为 s 处得到的图像 $f(s, t)$ 的投影值为

$$p(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\theta}(s, t) e^{-a_{\theta}(s, t)} dt \quad (12)$$

式中,

$$a_{\theta}(s, t) = \int_l \mu_{\theta}(s, \tau) d\tau \quad (13)$$

表示衰减系数 $\mu_{\theta}(s, \tau)$ 沿投影线的累积。

KL 域内基于 Novikov 求逆变换公式的扇形投影重建算法可描述为^[5]

$$\begin{aligned} f(r, \varphi) &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{W_{\beta}(r, \varphi, \delta)}{\pi K} d\beta \times \\ &\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{D^2 \cos^2 \sigma \partial g(\sigma, \beta)}{\sin(\delta - \sigma) \partial \sigma} d\sigma + \\ &\frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{W_{\beta}^1(r, \varphi, \delta)}{\pi K} d\beta \times \\ &\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{g(\sigma, \beta) D \cos \sigma}{\sin(\delta - \sigma)} d\sigma \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{其中, } K = \sqrt{r^2 + D^2 + 2rD \sin(\beta - \varphi)} \quad (15)$$

$$\delta = \arcsin\left(\frac{r \cos(\beta - \varphi)}{K}\right) \quad (16)$$

$$g(\sigma, \beta) = (e^h p)(D \sin \sigma, \sigma + \beta) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} W_{\beta}(r, \varphi, \delta) &= e^{a_{\theta}(s, t) - h(s, \theta)} \Big|_{\theta = \delta + \beta, s = r \cos(\theta - \varphi), t = r \sin(\theta - \varphi)} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} W_{\beta}^1(r, \varphi, \delta) &= \frac{\partial e^{a_{\theta}(s, t) - h(s, \theta)}}{\partial s} \Big|_{\theta = \delta + \beta, s = r \cos(\theta - \varphi), t = r \sin(\theta - \varphi)} \end{aligned} \quad (19)$$

其中, $a_{\theta}(s, t)$ 如式(13)所示, $h(s, \theta)$ 定义如下:

$$h(s, \theta) = \frac{1}{2} [(\mathbf{R} + \mathbf{iHR})\mu](s, \theta) \quad (20)$$

式中, \mathbf{R}, \mathbf{H} 分别代表 Radon 变换与 Hilbert 变换,其定义如下:

$$[\mathbf{R}f](s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\theta}(s, t) dt \quad (21)$$

$$[\mathbf{H}g](s) = \frac{1}{\pi} p v \frac{g(l)}{(s - l)} dl \quad (22)$$

根据式(14)~式(22),就可在 KL 域内对各投影分量进行定量重建。

由 KL 变换性质可知,对应特征值越大的分量包含了越多的相关信息;反之,对应特征值越小的分量包含了越多的细节和噪声信息。根据这一性质,在重建过程中,可抛弃掉排序靠后(特征值按由大到小排序)的一些分量,以达到滤除噪声和加快重建速度的目的。本文的模拟实验及数据展示了重建不同数量 KL 域投影分量的结果及所需时间。

在 KL 域中得到的重建结果通过相应的逆 KL 变换即可获得时域中的 SPECT 图像。

4 仿真实验

为了检测算法的性能,本文采用 NCAT (NURBS-based Cardiac-Torso Phantom)^[6] 人体胸部模型(模拟心脏在一个完整的呼吸周期内收缩及扩张变化)进行了仿真实验。该模型可在一个呼吸周期内产生 16 幅图像,每幅图像大小为 128×128 pixels。扇形模式下的投影数据可通过对每幅图像在 0 到 360° 内,按等角度间隔进行 128 次投影获得,每次投影时,探测器数目亦为 128。

对模拟投影数据进行 KL 变换后得到的特征值分布如图 2 所示。通过对 KL 域内特征值进行的计算分析结果(见表 1)表明,与前 4 个分量对应的特征值占全部特征值的比例达到 99.9% 以上。这说明该 4 个分量包含了时间序列中的绝大多数信息。因此,仿真实验在 KL 域内仅对这 4 个分量进行了重建,并将结果通过逆 KL 变换返回到时域,重建结果见图 3。

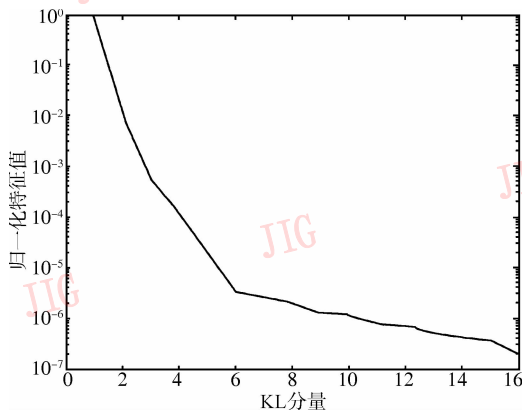


图 2 归一化的特征值分布

Fig. 2 Normalized distribution of eigenvalues in KL domain

表 1 KL 分量对应的特征值占全部特征值的比例

Tab. 1 Percentage of eigenvalues corresponding to different KL components

单位: %

k	v_k	$\sum v_k$
1	96.12	96.12
2	3.40	99.52
3	0.31	99.84
4	0.11	99.95
5 ~ 16	0.05	100

同时,为了对比本算法与其他算法的重建效果,仿真实验同时给出了在有噪声和无噪声环境下,对于扇形投影,采用 FBP、有序子集最大期望(ordered subset-expectation maximization, OS-EM)和基于

Novikov 求逆变换公式的重建结果。

不同算法对 NCAT 模型的重建时间比较见表 2。由表 2 可见,本文提出的算法优势明显。

表 2 不同算法重建时间比较

Tab. 2 Comparison of reconstruction time used by different algorithms

	FBP	OS-EM	Novikov	本文算法
时间(s)	19	77	34	14

注:所有重建时间均采用相同的计算机软硬件环境(Intel 奔腾 4 处理器,主频 2.8GHz, 256M RAM, Visual C++ 6.0 开发平台)进行计算的结果。

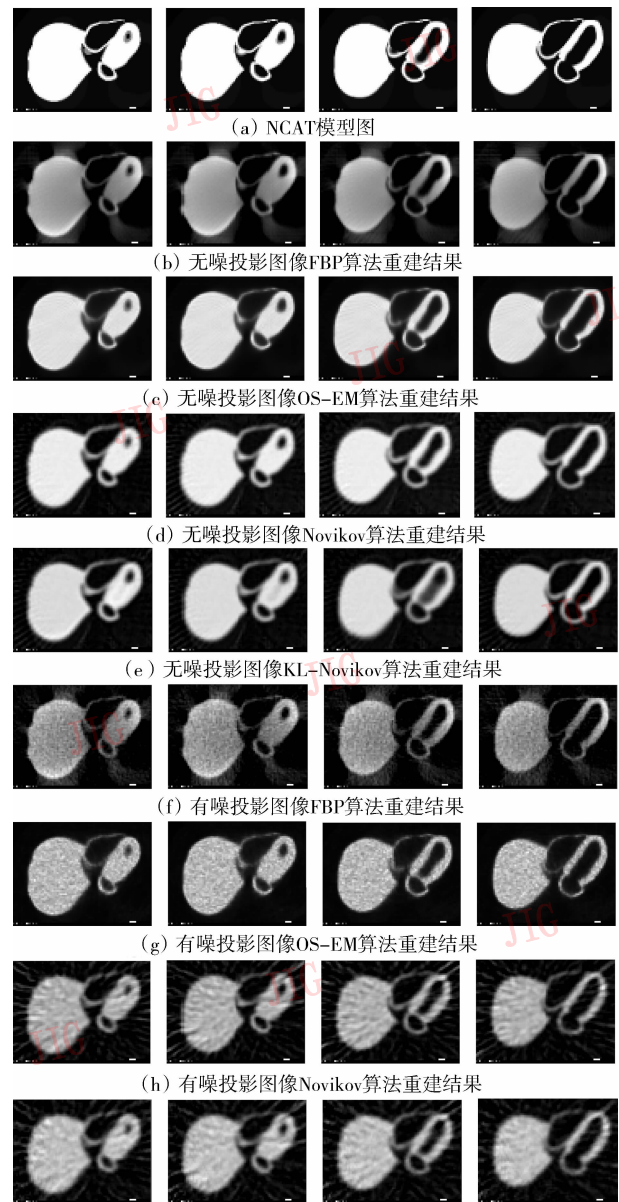


图 3 不同算法重建结果比较(从左到右分别为为时间序列图像中的第 1、5、11、15 幅采样图像)

Fig. 3 Comparison of images reconstructed by different algorithms

5 结 论

采用传统算法对4维SPECT图像进行重建是通过将之分解为若干个3维重建问题加以解决,但忽略了时间序列中的相关信息。本研究提出了一种适用于扇形投影方式的定量解析重建算法,该算法利用了时间序列投影图像中存在的相关信息,由于将4维投影图像作为一个整体研究对象加以考虑,从而解决了以往算法在这方面的不足。同时,还通过对扇形投影方式下Novikov数学重建公式的推导,对SPECT成像过程中的非均匀衰减进行了定量补偿,不仅改变了以往定量重建只能通过迭代途径的局面,同时,亦克服了后者计算量过大的缺点。重建图像所需时间与FBP算法的运算时间接近,能够满足临床要求。仿真实验结果亦证明了该算法的有效性。

实验结果还进一步表明了通过在KL域内对有序投影图像进行部分重建,不仅不会降低重建图像质量,还将大大降低重建所需的时间。因此该算法

有望在临床方面有广泛的应用前景。

参考文献 (References)

- 1 Wernick M N, Insusino E J, Milosevic M. Fast spatio-temporal image reconstruction for dynamic PET [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1999, **18**(3): 185 ~ 195.
- 2 Narayanan M V, King M A, Wernick M N, *et al.* Improved image quality and computation reduction in 4-D reconstruction of cardiac-gated SPECT images [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2000, **19**(5): 423 ~ 433.
- 3 Novikov R G. An inversion formula for the attenuated X-ray transformation [J]. Arkiv for Matematik, 2002, **40**(1): 145 ~ 167.
- 4 Kunyansky L A. A new SPECT reconstruction algorithm based on the Novikov's explicit inversion formula [J]. Inverse Problems, 2001, **17**(2): 293 ~ 306.
- 5 You J. FBP algorithms for attenuated fan-beam projections [J]. Inverse Problems, 2005, **21**(3): 1179 ~ 1192.
- 6 Pretorius P H, Xia W, King M A, *et al.* Evaluation of right and left ventricular volume and ejection fraction using a mathematical cardiac torso phantom for gated pool SPECT [J]. Journal of Nuclear Medicine, 1997, **38**(10): 1528 ~ 1535.